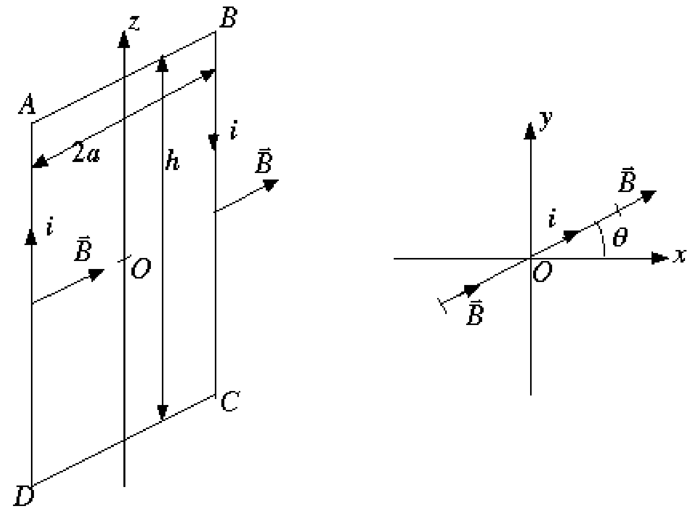
Galvanomètre à cadre mobile.

Une bobine est formée de N spires rectangulaires $ABCD$ de centre O avec $AB = 2\,a$ et $BC = h$. Elle est mobile autour d'un axe vertical Oz, médiatrice commune à AB et CD. Elle est suspendu par un fil fin qui a un triple rôle :

1. maintenir la bobine en suspension,
2. exercer sur la bobine un couple de rappel dont le moment projeté sur Oz est égal à $\Gamma = -C\,\theta$ où θ est l'angle que fait la direction de AB avec Ox,
3. amener un courant i qui traverse la bobine, le sens positif étant celui qui la parcourt dans le sens $ABCD$.

La bobine est plongée dans un champ magnétique stationnaire conçu de sorte qu'il soit parallèle au plan xOy au niveau des côtés AB et CD, radial et de module constant B_0 au niveau de BC et DA, vers l'intérieur au niveau de DA et vers l'extérieur au niveau de BC



Question 1 :

Calculer, dans l'hypothèse d'une rotation de la bobine, la tension électromotrice ; on fera apparaître la constante $\Phi_0 = 2\,N\,a\,h\,B_0$***.***

On part de la formule

$$e = \oint_{\text{bobine}} \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = N \int_{\text{ABCDA}} \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

En introduisant la base locale des coordonnées cylindriques, pour un point de DA, on a $\overrightarrow{v} = a\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{B} = -B_0\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_z}$ (orientation dans le sens positif du courant). D'où

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} = -a\,\dot{\theta}\,B_0\,\overrightarrow{e_\theta} \wedge \overrightarrow{e_r} = a\,\dot{\theta}\,B_0\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = a\,\dot{\theta}\,B_0\,\mathrm{d}l\,\overrightarrow{e_z} \cdot \overrightarrow{e_z} = a\,\dot{\theta}\,B_0\,\mathrm{d}l$$

$$\int_{\text{DA}} \left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_A^B a\,\dot{\theta}\,B_0\,\mathrm{d}l = a\,\dot{\theta}\,B_0 \int_A^B \mathrm{d}l = a\,\dot{\theta}\,B_0\,h$$

Sur le côté BC, $\overrightarrow{B}$ change de signe, mais l'orientation du courant change, donc $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ change de signe aussi : on trouve donc le même résultat.

Sur les côtés AB et CD, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ sont coplanaires dans le plan Oxy, leur produit mixte et donc nul. Le bilan est donc :

$$e = N\,(0 + a\,\dot{\theta}\,B_0\,h + 0 + a\,\dot{\theta}\,B_0\,h) = 2\,N\,a\,h\,B_0\,\dot{\theta} = \Phi_0\,\dot{\theta}$$

Question 2 :
Calculer le moment des forces de Laplace par rapport à Oz ; on fera à nouveau apparaître Φ_0.

Là encore, on va multiplier par N le moment calculé pour une spire de la bobine, celui-ci étant calculé comme somme des contributions des quatre côtés. Pour le côté DA, considérons un élément $\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \overrightarrow{MM'}$, M et M' ayant les cotes z et $z + \mathrm{d}z$; la force de Laplace qu'il subit est :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = i\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} \wedge \overrightarrow{B} = -i\,\mathrm{d}l\,B_0\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r} = -i\,\mathrm{d}l\,B_0\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Cette force s'applique en M avec $\overrightarrow{OM} = a\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}$, d'où :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\mathfrak{M}}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{d}F} = i\,\mathrm{d}l\,B_0\,(-a\,\overrightarrow{e_z} + z\,\overrightarrow{e_r})$$

$$\mathrm{d}\mathfrak{M}_{Oz} = -i\,\mathrm{d}l\,B_0\,a$$

et par intégration

$$\mathfrak{M}_{DA} = -i\,h\,B_0\,a$$

Attention à la maladresse classique consistant à intégrer $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$: on ne sait pas où placer la force totale pour en calculer le moment ; certes en la mettant pifométriquement au milieu de DA, on trouve le bon résultat, mais la seule façon de justifier ce choix est...de mener le calcul du moment comme ci-dessus !

Pour le côté BC, comme ci-dessus, un double changement de signe conduit au même résultat. Pour les côtés AB et CD, les $\overrightarrow{\mathrm{d}F}$ sont parallèles à Oz, donc les moments perpendiculaires à Oz et leurs projections nulles.

Finalement

$$\mathfrak{M} = -N\,(i\,h\,B_0\,a + 0 + i\,h\,B_0\,a + 0) = -\Phi_0\,i$$

Question 3 :
Vérifier que le couplage électromécanique est parfait.

La bobine reçoit la puissance électrique

$$\mathcal{P}_e = e\,i = \Phi_0\,\dot{\theta}\,i$$

et la puissance mécanique

$$\mathcal{P}_m = \mathfrak{M}\,\dot{\theta} = -\Phi_0\,i\,\dot{\theta}$$

Le couplage est parfait dans la mesure où $\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_m = 0$.

Rappelons que ce résultat est une bouée de secours permettant, par exemple, de calculer $\mathfrak{M}$ indirectement si l'on ne sait plus le faire directement. Attention toutefois, ceci n'est valable que si le champ magnétique est stationnaire.

Question 4 :
Mettre en équation le mouvement de rotation de la bobine, de moment d'inertie J, en négligeant les frottements fluides dus à l'air.

On est dans le contexte d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Oz, donc d'une part le théorème du moment cinétique par rapport à Oz donne

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \Sigma\,\mathfrak{M}_{Oz}$$

d'autre part, par définition du moment d'inertie J par rapport à Oz

$$\sigma_{Oz} = J\,\omega = J\,\dot{\theta}$$

et

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{Oz}}{\mathrm{d}t} = J\,\ddot{\theta}$$

Faisons le bilan des interactions :
– le poids s'applique au centre de gravité, donc en O et son moment calculé en O est donc nul.
– la tension du fil, parallèle à Oz, donc de moment nul.
– le couple de torsion dont le moment est indépendant du point de calcul.
– les forces de Laplace étudiées plus haut.
Donc

$$J\,\ddot{\theta} = -C\,\theta - \Phi_0\,i$$

$$J\,\ddot{\theta} + C\,\theta + \Phi_0\,i = 0 \qquad \text{(équation 1)}$$

Question 5 :
La bobine, de résistance r et d'auto-inductance négligeable est fermée sur un circuit linéaire, équivalant, théorème de Thevin oblige, à un générateur de tension électromotrice E et de résistance R, grande en pratique devant r, qui donne naissance au courant i. Mettre en équation le circuit électrique obtenu.

Le circuit comporte deux tensions électromotrices E et celle d'induction e, et deux résistances R et r, donc, en notant $R_T = R + r$,

$$E + e = E + \Phi_0\,\dot{\theta} = (R + r)\,i = R_T\,i$$

$$R_T\,i = E + \Phi_0\,\dot{\theta} \qquad \text{(équation 2)}$$

Question 6 :
En déduire que $\theta(t)$ est solution d'une équation différentielle d'oscillateur amorti et que la position d'équilibre est proportionnelle à l'intensité à l'équilibre.

On tire i de l'équation 2 et l'on reporte dans l'équation 1 :

$$J\,\ddot{\theta} + \frac{\Phi_0^2}{R_T}\,\dot{\theta} + C\,\theta = -\frac{\Phi_0\,E}{R_T}$$

A l'équilibre, les dérivées temporelles sont nulles et

$$\theta_E = -\frac{\Phi_0\,E}{C\,R_T}$$

Or l'équation 2 donne alors $R_T\,i_E = E$, d'où

$$\theta_E = -\frac{\Phi_0}{C}\,i_E$$

Le galvanomètre mesure donc bien une intensité ; le signe négatif n'a aucune signification précise car il dépend de conventions d'orientation.

L'équation est celle d'un oscillateur amorti et l'on s'arrange pour qu'en fonctionnement normal l'amortissement reste proche de l'amortissement critique qui est celui qui assure une mise à l'équilibre la plus rapide possible. Malheureusement le discriminant de l'équation résolvante fait intervenir la résistance du circuit extérieur au galvanomètre, ce qui rend la condition inexploitable.

On pourrait aller au delà en étudiant un ampéremètre construit à partir d'un galvanomètre mais l'utilisation de l'électronique rend cette construction désuette et je passerais pour ringard si j'allais m'aventurer par là.